

矩阵乘法

北京化工大学理学院 郭玲

教学内容：矩阵乘法及其性质

教学目的：作为概念引入，矩阵运算的应用

教学对象：会计，高材 一年级

教学时间：30 分钟

教学建议：例 1、例 2 引入概念用，例 7 作为矩阵运算综合应用，也可作方程组解法的引例

一、问题的引入：

例 1：学院进行体育比赛，四个年级分别获得金、银、铜牌数见表格 1-1；得分与奖金见表格 1-2；统计每个年级的总分数和总奖金数。

表 1-1

	金牌	银牌	铜牌
四年级	3	3	1
三年级	5	4	2
二年级	4	5	6
一年级	4	4	7

表 1-2

	分值	奖金(元)
金牌	3	500
银牌	2	300
铜牌	1	100

表 1-3

	总分	总奖金(元)
四年级	$3 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 16$	$3 \times 500 + 3 \times 300 + 1 \times 100 = 2500$
三年级	$5 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times 1 = 25$	$5 \times 500 + 4 \times 300 + 2 \times 100 = 3900$
二年级	$4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 1 = 28$	$4 \times 500 + 5 \times 300 + 6 \times 100 = 4100$
一年级	$4 \times 3 + 4 \times 2 + 7 \times 1 = 27$	$4 \times 500 + 4 \times 300 + 7 \times 100 = 3900$

如用矩阵 A、B、C 分别表示表 1-1，表 1-2，表 1-3 中的有关数据，

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 500 \\ 2 & 300 \\ 1 & 100 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 16 & 2500 \\ 25 & 3900 \\ 28 & 4100 \\ 27 & 3900 \end{pmatrix}$$

即：则这三个矩阵间有这样一种关系：

矩阵 C 完全由矩阵 A 和矩阵 B 决定，C 中每一个元素都是由 A 的某一行的元素和 B 的某一列对应元素相乘再相加得到。如 C 中第一行第二列的元素 $2500 = 3 \times 500 + 3 \times 300 + 1 \times 100$ ，就是 A 的第一行元素与 B 的第二列对应元素相乘再相加的结果。

例 2：某单位计划在 2008 年与 2009 年两年内建造三种类型的房屋，建造每种房屋的数

量如表 1-1，每 100m² 房屋各种材料的耗用量如表 1-2，试求 2008 年与 2009 年计划建造房屋所需的各种材料的耗用量。

表 2-1

年份 \ 类型	甲	乙	丙
2008	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2009	a_{21}	a_{22}	a_{23}

表 2-2

类型 \ 材料	水泥 (t)	钢筋 (t)	木材 (m ²)
甲	b_{11}	b_{12}	b_{13}
乙	b_{21}	b_{22}	b_{23}
丙	b_{31}	b_{32}	b_{33}

解：依题意，2008 年和 2009 年计划建造房屋所需的各种材料的耗用量为表 2-3

表 2-3

年份 \ 材料	水泥 (t)	钢筋 (t)	木材 (m ²)
2008	$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$	$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$	$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$
2009	$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$	$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$	$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

用矩阵 A、B、C 表示上面表格

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{pmatrix}$$

则 C 中的元素也是由 A 的某一行的元素和 B 的某一列对应元素相乘再相加得到。这种由矩阵 A 和矩阵 B 决定矩阵 C 的方法就是矩阵的乘法。

二、矩阵乘法概念

定义 设 $A = (a_{ij})_{m \times r}$, $B = (b_{ij})_{r \times n}$, 则由元素 $c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$

构成的矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ 称为矩阵 A 与矩阵 B 的乘积, 记为 $C = AB$.

这个定义说明, 矩阵 A 与矩阵 B 的乘积 C 的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 A 的第 i 行与第二个矩阵 B 的第 j 列对应元素乘积之和。并且矩阵 C 的行数等于矩阵 A 的行数, 列数等于矩阵 B 的列数。

矩阵乘法可示意如下:

$$i\text{行} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{sj} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} i\text{行}$$

例 3: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA

$$\text{解: } AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

BA 没有意义

例 4: 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$, 求 AB 和 BA 。

$$\text{解: } AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}, \quad BA = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

此例说明: AB 和 BA 都有意义, 他们的行数、列数也不一定相同。

例 5: 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA

$$\text{解: } AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此例说明： AB 和 BA 都有意义且他们的行数、列数相同，但 AB 和 BA 也不一定相等。此例还说明两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵。

例 6：设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 AC 和 BC

$$\text{解：} AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此例说明，虽然 $AC = BC$ 且 $C \neq O$ ，但不能推出 $A = B$ 。

根据上面的例题，在做乘法计算时要注意以下几点：

1. 矩阵乘法不满足交换律，一般来说 $AB \neq BA$ ；
2. 矩阵乘法不满足消去律，一般来说，当 $AB = AC$ 且 $A \neq O$ 时，不一定有 $B = C$ ；
3. 一般由 $AB = O$ ，不能推出 $A = O$ 或 $B = O$ ，这时称 A (B) 是 B (A) 的左 (右) 零因子。

三、运算规律

1. 结合律 $(AB)C = A(BC)$

2. 分配律

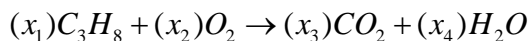
$$(A+B)C = AC + BC \quad A(B+C) = AB + AC$$

$$k(AB) = (kA)B$$

定义 方阵的幂 $A_{n \times n}^m = AA \cdots A$ m 个 A 连乘。

例 7：化学方程的配平

化学方程描述了被消耗和新生成的物质之间的定量关系。例如，化学实验的结果表明，丙烷燃烧时将消耗氧气并确实产生二氧化碳和水，其化学反应的方程为：



要配平这个方程，必须找到适当的 x_1, x_2, x_3, x_4 ，使得反应式左右的碳、氢、氧元素相匹配。

配平化学方程的标准方法是建立一个向量方程组，每个方程分别描述一种原子在反应前后的数目。在上面的方程中，有碳、氢、氧三种元素需要配平，构成了三个方程。而有四种物质，其数量用四个变量 x_1, x_2, x_3, x_4 来表示。将每种物质分子中的元素原子数按碳、氢、氧的次序排列，可以写出：

$$C_3H_8: \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_2: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad CO_2: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad H_2O: \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

要使方程配平, x_1, x_2, x_3, x_4 必须满足:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将所有项移到左端, 并写成矩阵相乘的形式, 就有:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = O$$

例 8: 将非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 表示成矩阵乘积的形式

解: 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

由矩阵乘法定义, 方程组可用矩阵乘法表示为

$$AX = B$$