

第一部分

1、累积函数

先来了解几个基本的概念：本金、累积额（本利和）、总额函数 $A(t)$ 、累积函数 $a(t)$ （单位本金的总额函数）。

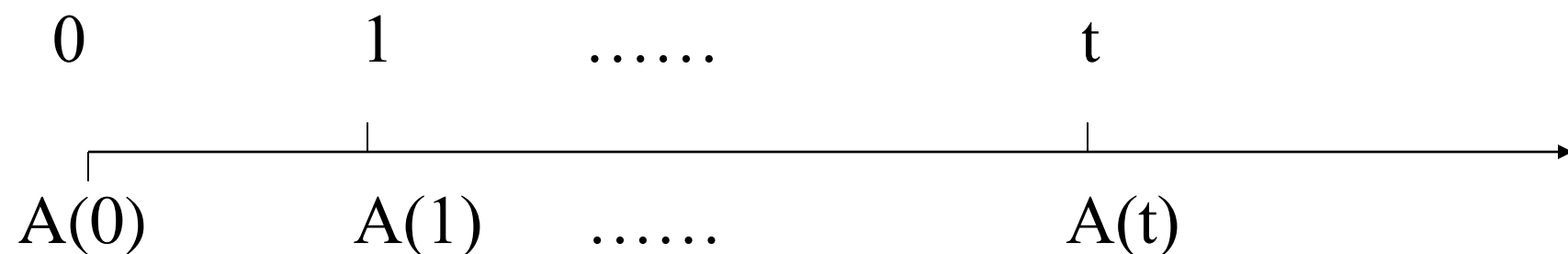
我们把最初投资的、孳生利息的款项称作本金，用 $A(0)$ 表示，把本金经过一定时期后形成的金额称为累积额，用 $A(t)$ 表示。它是本金和利息之和，又称为“本利和”。当本金为1单位元时，用 $a(t)$ 表示1单位元的累积额，称之为累积函数，它有以下性质：

1、 $a(0)=1$

2、 $a(t)$ 通常是 t 的递增函数（要求利率必须是正数）

3、如果连续结算利息（ t 连续取值），则 $a(t)$ 为连续函数，如果间断结算利息（ t 间断取值），则 $a(t)$ 为非连续函数。

设 t 是本金投资使用的时期长度，以 $A(t)$ 表示 t 时的累积额，假设利率是固定的常量，则 $A(t)$ 就是 t 的函数，称为总额函数。当 $t=0$ 时， $A(0)$ 就是本金。这里我们只讨论 $t \geq 0$ 的情况，并以年度为计量单位。利息是累积额与本金的差。以 $I(t)$ 表示由 0 到 t 时刻的利息额，则：



$$I(t) = A(t) - A(0)$$

利息额 = 本利和 - 本金

或
$$A(t) = A(0) + I(t)$$

本利和 = 本金 + 利息额

由于累积额直接受本金的影响，为数学处理的方便，进一步定义累积函数 $a(t)$ ：

$$a(t) = \frac{A(t)}{A(0)}$$

$a(t)$ 表示一单位货币额（比如1元）经过 t 年后的价值，它是单位本金的本利和。显然 $a(0)=1$ ， $A(t)=A(0)*a(t)$ ，由于 $A(0)$ 是常数，令 $A(0)=R$ ，因此也可记为 $A(t)=R*a(t)$ 。由此，对总额函数 $A(t)$ 的讨论就可以简化为对累计函数 $a(t)$ 的讨论。

按复利计息，t年后的本利和（总额函数）为：

$$A(t) = A(0) \times (1+i)^t = R \times a(t)$$

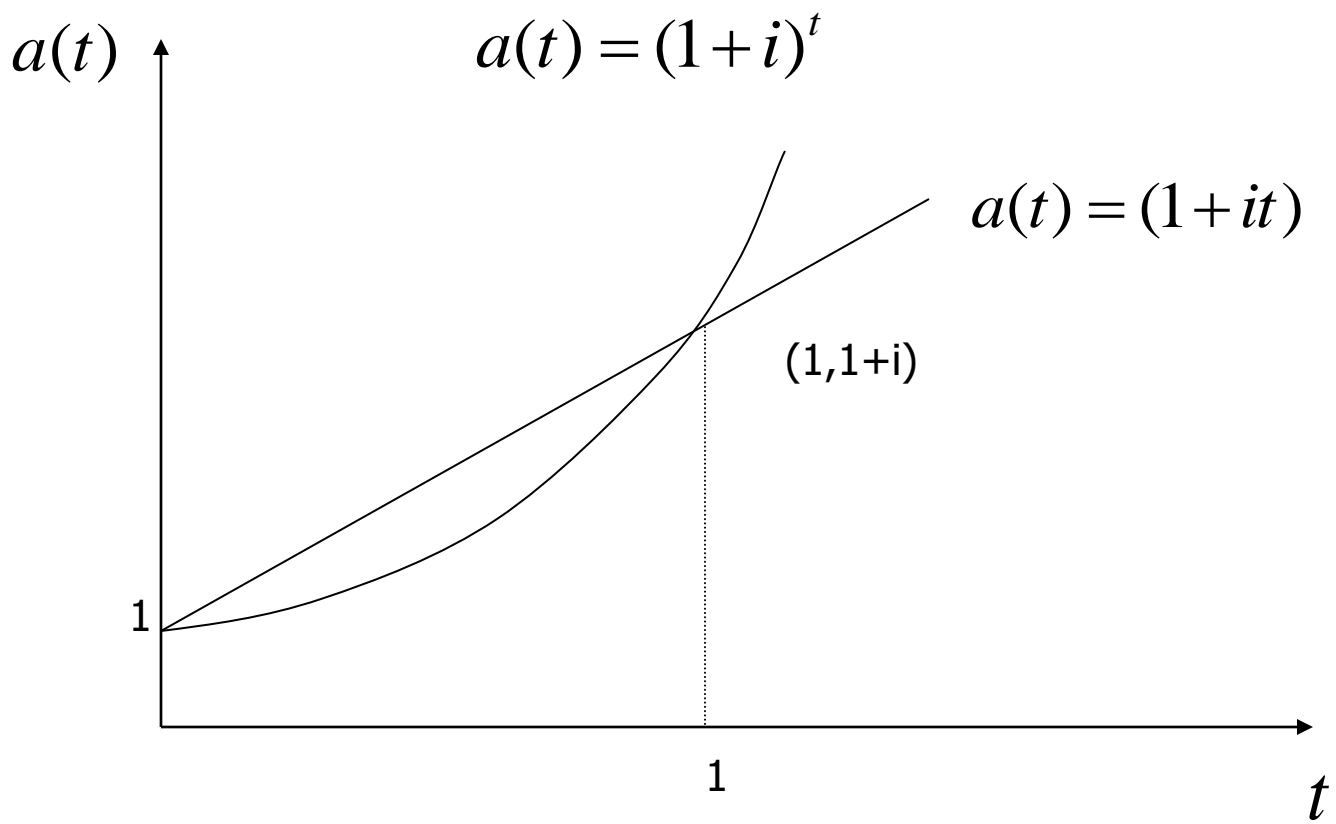
其中 $R=A(0)$ ，累积函数为： $a(t) = (1+i)^t$

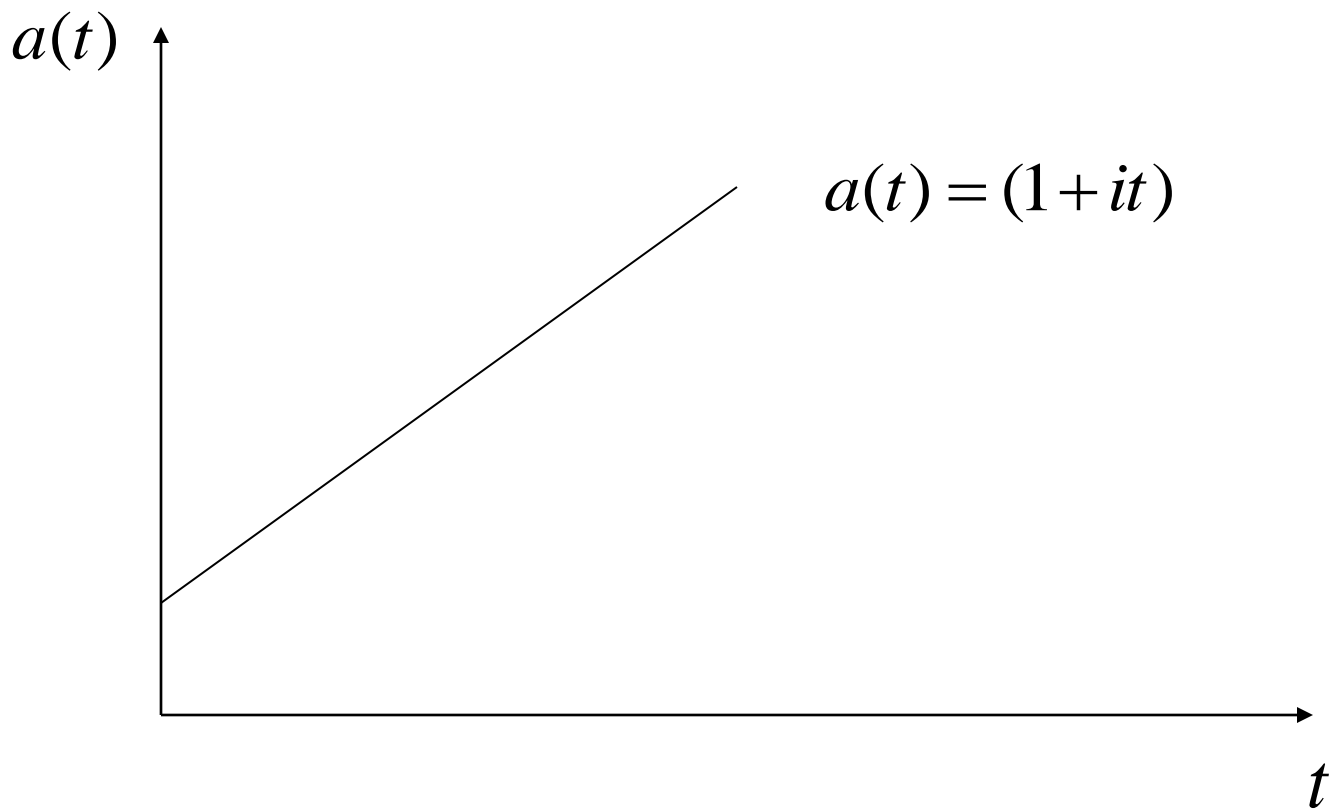
如果按单利计息，t年后的本利和为：

$$A(t) = A(0) \times (1+it)$$

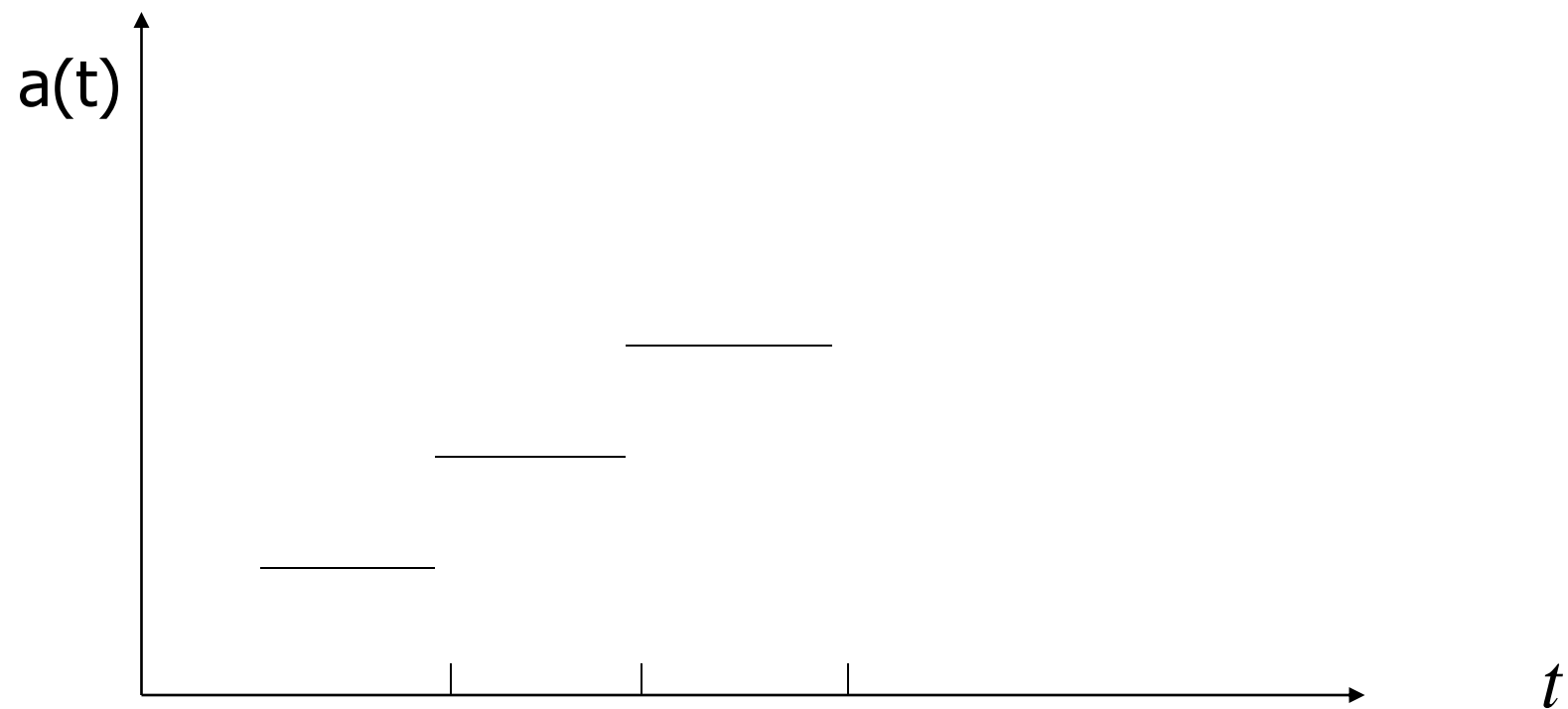
累积函数为： $a(t) = (1+it)$

具体图形见下方





$a(t)$ 通常为 t 的连续函数，在平面坐标上表现为通过 $(0, 1)$ 点的曲线。理论上， $a(t)$ 既可以是增函数，也可以是减函数(当 $-1 < r < 0$ 时)，但我们总是希望 $a(t)$ 为增函数，只有这样才能保证总额函数的递增性和存在正的利息。有时，当利息定期结算时， $a(t)$ 也表现为不连续的阶梯函数。在定期内 $a(t)$ 为常数，在定期结算利息时 $a(t)$ 上一个阶梯。当 $t=0, 1, 2, \dots$ 时， $a(0), a(1), a(2), \dots$ ，形成阶梯。



衡量资金生息水平的指标是利息率，它表示单位本金在单位时间内所孳生的利息。如果单位时间为一年，一年内一单位本金的利息就是实际利率，以 i 表示实际利率，则第 n 年的实际利率为：

$$i = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$$

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{A(0) \times a(n) - A(0) \times a(n-1)}{A(0) \times a(n-1)} = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)}$$

例：按复利计息，n年后的本利和为

n年后的本利和为 $A(n) = A(0) \times (1+i)^n$

则第n-1年的利率为 $A(n-1) = A(0) \times (1+i)^{n-1}$

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{A(0) \times (1+i)^n - A(0) \times (1+i)^{n-1}}{A(0) \times (1+i)^{n-1}} \\ &= (1+i) - 1 = i \end{aligned}$$

以上例子说明，按复利计息时，任何一年的利息率都是相同的。

2、单利和复利

利息的计算方法有单利和复利两种。单利只在本金上计算利息，其累积函数的形式为

$$a(t)=1+it \quad (t \geq 0)$$

当 $t=0$ 时， $a(0)=1$ ，当 $t=1$ 时， $a(1)=1+i$ ，说明它经过 $(0, 1)$ 和 $(1, 1+i)$ 点。

图形在上面累积函数部分已经给出。

在以上的例子中，如果按单利计息，则实际利率为：

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} \\ &= \frac{(1 + in) - (1 + i(n-1))}{(1 + i(n-1))} = \frac{i}{1 + i(n-1)} \end{aligned}$$

可见，随着n的增大 i_n 将变小。以上例子说明，按单利计息时，各年的利息率并不相同的。

对比复利累积函数和单利累积函数可知：

- 复利累积函数是上凹函数，单利累积函数是直线；
- 它们都以 $(0, 1)$ 为起点，并且经过 $(1, 1+i)$ 点；
- 当 $t > 1$ 时，复利比单利方式得到的利息更多；当 $0 < t < 1$ 时，单利的利息更大。

即当 $0 < t < 1$ 时， $(1+i)^t < (1+it)$

当 $1 < t < \infty$ 时， $(1+i)^t > (1+it)$

举例：李刚2006年1月1日从银行借款 1000元，假设年实际利率为12%，试分别以单利和复利计算：(1)2006年 5月20日时， 他需还银行多少钱？(2) 2008年1月1日 时， 他需还银行多少钱？(3)几年后需还款1500元？

解：

(1) 从2006年1月1日到5月20日共计140天， 即

$$31+28+31+30+20=140\text{天}$$

或利用excel中的date函数计算：

$\text{Date}(2006,5,20)-\text{date}(2006,1,1)=139$ ， 故计息天数为 139天。

以单利计息时： $(t=139/365<1)$

$$A(t)=1000*(1+ i t)=1000*(1+0.12*139/365)=1045.7\text{元}$$

以复利计息时： $A(t) = 1000 \times (1 + 0.12)^{\frac{139}{365}} = 1044.1$

可见，当 $t < 1$ 时，单利的累积函数要大于复利的累积函数。

（2）从 2006 年 1 月 1 日到 2008 年 1 月 1 日为两年，故 $t = 2$

以单利计息时：

$$A(t) = 1000 * (1 + i t) = 1000 * (1 + 0.12 * 2) = 1240 \text{ 元}$$

以复利计息时： $A(t) = 1000 \times (1 + 0.12)^2 = 1254.4$

可见，当 $t > 1$ 时，单利的累积函数要小于复利的累积函数。

(3)以单利计息时：

由 $1500=1000(1+0.12*t)$ ，得 $t=(1500/1000-1)/0.12=4.17$ 年

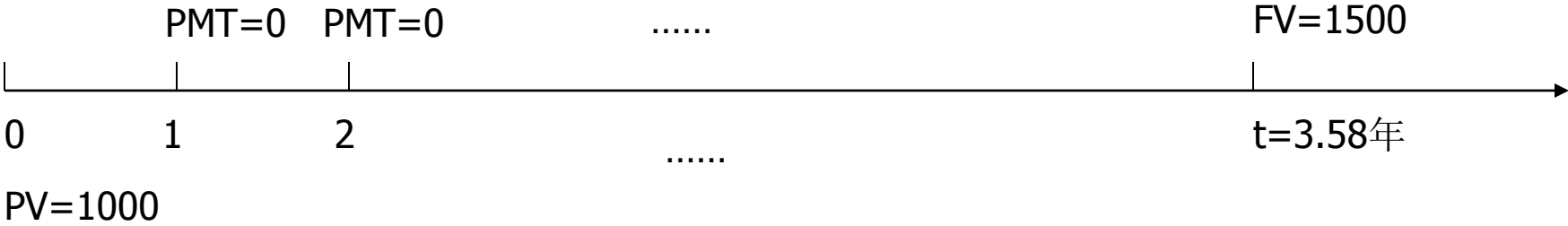
以复利计息时： $1500 = 1000 \times (1 + 0.12)^t$

$$(1 + 0.12)^t = \frac{1500}{1000} = 1.5$$

$$t = \frac{\ln 1.5}{\ln 1.12} = 3.58 \text{年}$$

或利用excel的NPER函数： $\text{nper}(\text{rate}, \text{pmt}, \text{pv}, \text{fv}) = \text{nper}(0.12, 0, 1000, -1500) = 3.58$ 年

用图形解释如下：



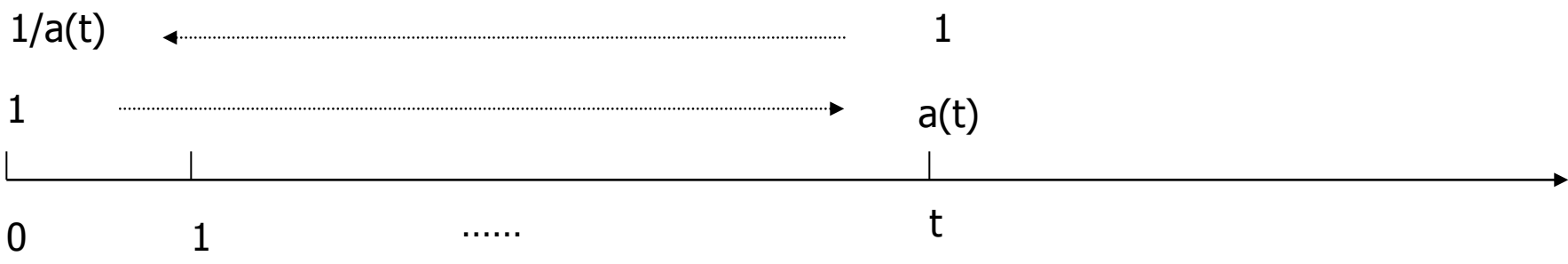
3、现值和贴现函数

一个单位本金经过t年后成为累积值a(t)，那么一单位累积值在t年前的值便为1/a(t)，或者说，1/a(t)经过t年后成为一单位元。其中的1/a(t)称之为贴现函数，记作a⁻¹(t)。

单利的贴现函数为：
$$a^{-1}(t) = \frac{1}{1 + it}$$

复利的贴现函数为：
$$a^{-1}(t) = \frac{1}{(1 + i)^t} = v^t$$

我们把现在一单位元在t年前的值或未来t年一单位元在现在的值称为t年现值。在单利方式下，一年的现值为1/(1+i)，两年的现值为1/(1+2i)，.....



在复利方式下，未来一年后1单位元现值为 $\frac{1}{(1+i)}$

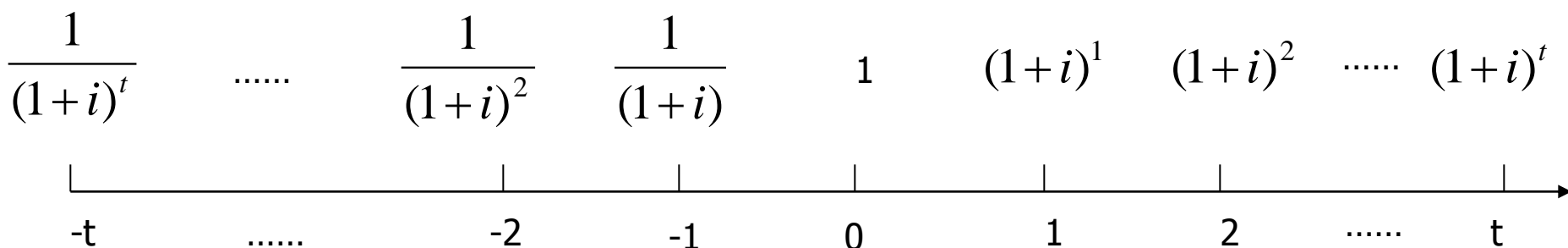
两年的现值为 $\frac{1}{(1+i)^2}$;

未来 t 年后1单位元的现值为 $\frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$

通常以 v^t 表示复利下1单位元的 t 年现值，即

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t} \quad v = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$$

用坐标表示，见下图：



在数标轴上的每个时点的数据是等值的

- 贴现额——如果应该在将来某时期支付的一笔金额提前到现在支付，则支付额中应扣除一部分金额，这个扣除额称为**贴现额**

例如，一年后将要支付的一笔金额为 $A(1)$ ，如果提前到现在支付，应扣除的贴现额为 $A(1)-A(0)$ 。再如， $A(5)-A(0)$ 表示5年后将要支付的金额提前到现在支付应扣除的贴现额。

■ 贴现率——单位货币额在单位时间内的贴现额。即：

$$\text{贴现率} = \frac{\text{贴现额}}{\text{将来支付的金额}}$$

■ 实际贴现率——若单位时间以年度为单位，这时的贴现率称为实际贴现率。通常用d表示贴现率。

$$d = \frac{A(1) - A(0)}{A(1)} = \frac{a(1) - a(0)}{a(1)}$$

第n年的贴现率为:

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n)}$$

提请注意: 第n年的利率为

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)}$$

由以上公式可得出贴现率与利率的关系:

利率一般大于贴现率

$$d = \frac{a(1) - 1}{a(1)} = \frac{1 + i - 1}{1 + i} = \frac{i}{1 + i}$$

以及:

$$i = \frac{d}{1 - d}$$

举例：假定利息率为8%，按复利计息，100元本金10年后本利和为 $A(10)=100*(1+8\%)^{10}=215.9$ ；

9年后的本利和为 $A(9)=100*(1+8\%)^9=199.9$ 元，第10年的贴现率为：

$$d_{10} = \frac{A(10) - A(9)}{A(10)} = \frac{215.9 - 199.9}{215.9} = 7.4\%$$

我们注意到，按复利计息时： $i_n = i$ ，并且 $d_n = d$ 也同样成立，因为：

$$d_n = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = d$$

所以，公式 $d_n = \frac{i_n}{1+i_n}$ 就可以写成： $d = \frac{i}{1+i}$

公式还可变形为： $i = \frac{d}{1-d}$

注意到： $1-d = 1 - \frac{i}{1+i} = \frac{1+i-i}{1+i} = \frac{1}{1+i} = v$

或者： $d = 1-v$

上例中的贴现率可直接用公式计算： $d = \frac{i}{1+i} = \frac{8\%}{1+8\%} = 7.4\%$

从以上例子中可以看出： $d < i$

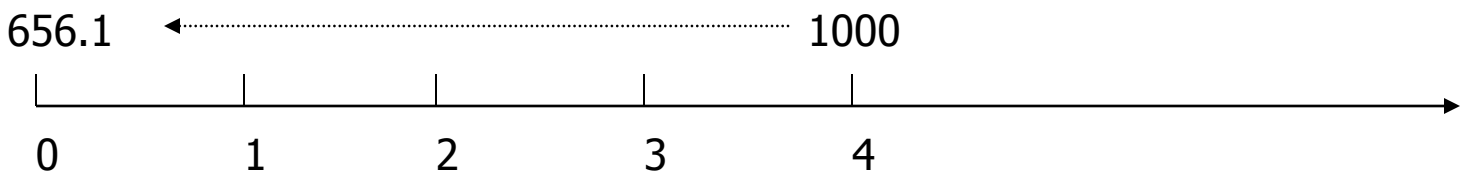
例如，2006年1月1日累积值为1000元，则在d=10%的复利贴现率下2002年1月1日的现值为： $1000 \times (1 - 10\%)^4 = 656.1(\text{元})$

实际利率为：

$$i = \frac{d}{1 - d} = \frac{10\%}{1 - 10\%} = 11.11\%$$

以上1000元的现值还可以按以下方式计算：

$$1000 \times \frac{1}{(1 + 11.11\%)^4} = 656.1(\text{元})$$



假设单利的年利率为5%，（1）如果希望在9个月末获得2000元的本利和；（2）如果希望在2年3个月后获得2000元的本利和，试分别计算期初的本金分别为多少。

解：9个月相当于 $9/12=0.75$ 年；2年3个月相当于2.25年。

$$(1) \quad 2000/(1+0.75*5\%)=1927.71 \text{元} \quad A*(1+0.75*0.05)=2000$$

$$(2) \quad 2000/(1+2.25*5\%)=1797.75 \text{元} \quad B*(1+2.25*0.05)=2000$$

假设复利的年利率为5%，（1）如果希望在9个月末获得2000元的本利和；（2）如果希望在2年3个月后获得2000元的本利和，试分别计算期初的本金分别为多少。

解：

$$(1) \quad \text{用利率 } i \text{ 折现:} \quad 2000/(1+5\%)^{0.75}=1928.14 \text{元}$$

$$\text{用贴现率 } d \text{ 贴现:} \quad 2000*(1-0.047619)^{0.75}=1928.14$$

$$(2) \quad \text{用利率 } i \text{ 折现:} \quad 2000/(1+5\%)^{2.25}=1792.07 \text{元}$$

$$\text{用贴现率 } d \text{ 贴现:} \quad 2000*(1-0.047619)^{2.25}=1792.07$$

4、名义利率和名义贴现率

我们通常所说的利率一般是指年利率。但是在实际计算利息时也经常按半年、按季、按月计息。在年利率不变时，一年当中多次计息并且按复利计息，则实际所产生的利息额与名义上的利息额就不相同。

例如，本金1元，年利率为10%，按复利计息半年结算一次利息，每次结算利息时实际上采用的利率为 $10\%/2=5\%$ ，1元本金半年后的本利和为 $1 * (1+5\%) = 1.05$ 元，一年后的本利和为 $1.05 * (1+5\%) = 1.1025$ 元，其中利息额为0.1025元。这相当于一年结算一次的实际利率为10.25%。我们称10%为一年结算两次的名义利率，称10.25%为实际利率。

- **名义利率**——我们把1年内结算多次的年利率称为名义利率。用 $i^{(m)}$ 表示，其中 m 表示1年中结算的次数。
- **实际利率**——把1年内结算多次的名义利率换算为1年结算1次的年利率，这个年利率成为实际年利率。用 i 表示。

$\frac{i^{(m)}}{m}$ 表示在每次结算时实际使用的利率（**期利率**）。

在复利的条件下，年初1元本金，一年结算 m 次、在年末的累积额

为 $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$ 如果它相当于用实际利率 i 计算的、1年结算1次

的累积额为 $(1+i)$ ，则有：
$$(1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

因此：
$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

或：
$$i^{(m)} = ((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1) \times m$$

以上这两个公式可以作为名义利率和实际利率的互换公式。

名义贴现率与名义利率的意义相似。用 $d^{(m)}$ 表示原来规定的一年结算 m 次的名义贴现率，则每次结算的实际贴现率为 $\frac{d^{(m)}}{m}$ ，若 d 表示实际贴现率，则：

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

因此：

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

或：

$$d^{(m)} = (1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}}) \times m$$

例：(1)求每月结算的年利率为12%的实际利率。(2)求每季结算的年贴现率为10%的实际贴现率。(3)求相当于每月结算的年利率为12%的半年结算的贴现率。

解：(1)由题意知： $m = 12$ $i^{(12)} = 12\%$

$$i = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{12} - 1 = 12.68\%$$

(2)已知数据: $m = 4$ $d^{(4)} = 10\%$

$$d = 1 - \left(1 - \frac{10\%}{4}\right)^4 = 9.63\%$$

(3)一笔现值为P的本金，按12%的年利率每月结算一次，

1年后的终值为: $F = P \times \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{12}$

则现值为: $P = F \times \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{-12}$

如果把这笔钱的终值F按照年贴现率 $d^{(2)}$ 半年结算一次的来贴现，

则现值为： $P = F \times \left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2$

如果以上两种方式计算的现值相等，则：

$$\left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{-12} = \left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2$$

$$d^{(2)} = 2 \times \left(1 - \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{\frac{-12}{2}}\right) = 11.59\%$$

一张尚需6个月到期的票据，其面值为2000元。如果按6%的名义贴现率贴现，每个季度预收1次贴现值，试计算票据的现值为多少？

解：已知： $d^{(4)} = 0.06$ 求2000元在6个月前的现值。

(1) 用 $d^{(4)}$ 贴现： $2000 \times \left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^2 = 1940.45$

(2) 用 $d^{(2)}$ 贴现： $2000 \times \left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^1 = 1940.45$

(3) 用 d 贴现： $2000 \times (1 - d)^{0.5} = 1940.45$

(1) 用 $i^{(4)}$ 折现: $2000 \times \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^{-2} = 1940.45$

(2) 用 $i^{(2)}$ 折现: $2000 \times \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-1} = 1940.45$

(3) 用 i 折现: $2000 \times (1 + i)^{-0.5} = 1940.45$

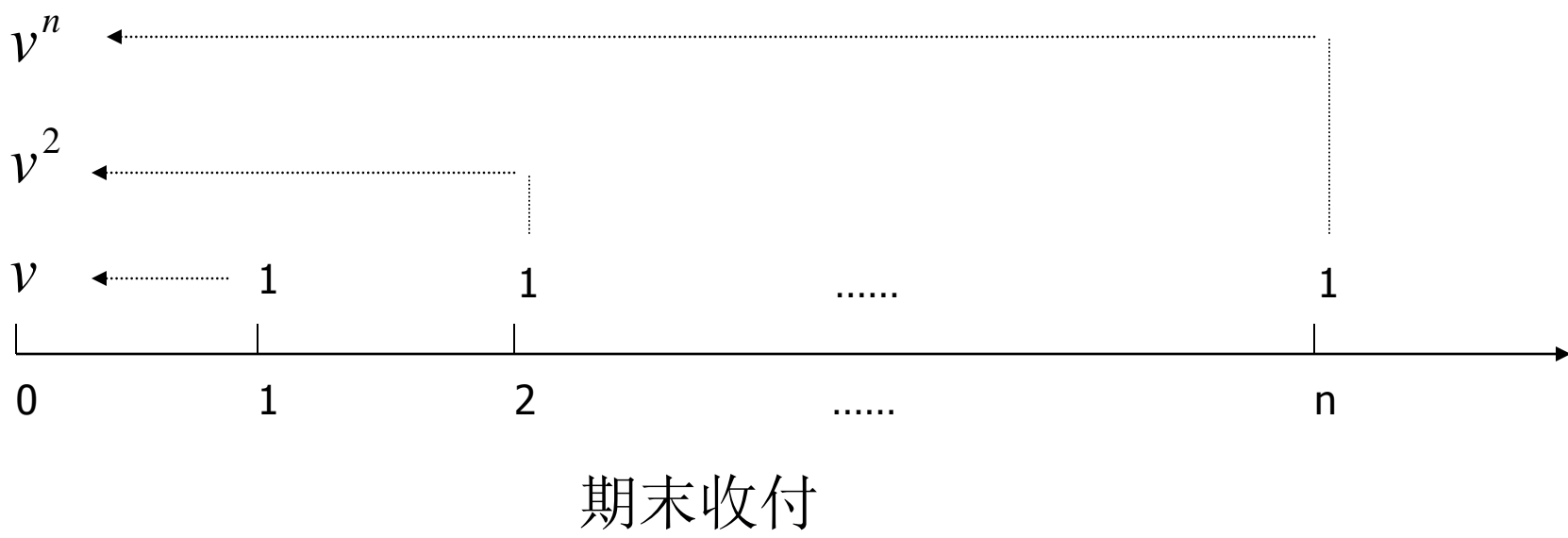
第二部分： 年金

年金是收付款项的一种方法。它是每隔一个相等间隔的一系列固定金额的收付款方法。实际中采取年金方法收付款项的例子很多，例如，向银行一次性贷款后采取在若干年内每年等额还款方法还清贷款。再如，以分期付款方式购买某一固定资产等。年金可以按收付款时点不同分为期末付年金和期首付年金；

1、年金现值

年金现值是一系列等额收付款在收付期初的现值之和。

对每年一单位元（1元）共收付n年的n年定期年金，当收付款发生在每年年末时，以 $a_{\overline{n}|}$ 表示其现值。显然 $a_{\overline{n}|}$ 是每年末一单位元在收付期初现值的合计。



如果按复利计息，每年结算一次，则

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{\frac{1}{(1+i)} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \\ &= \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1 - v^n}{i} \end{aligned}$$

提示：

等比数列的前 n 项求和 = $\frac{\text{首项} - \text{末项} \times \text{公比}}{1 - \text{公比}}$

用另一种方法推导以上公式：

将等式 $a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n$ (1)

两边同乘 v : $a_{\overline{n}|} \cdot v = v^2 + v^3 + \cdots + v^{n+1}$ (2)

由 (1) - (2) 得：

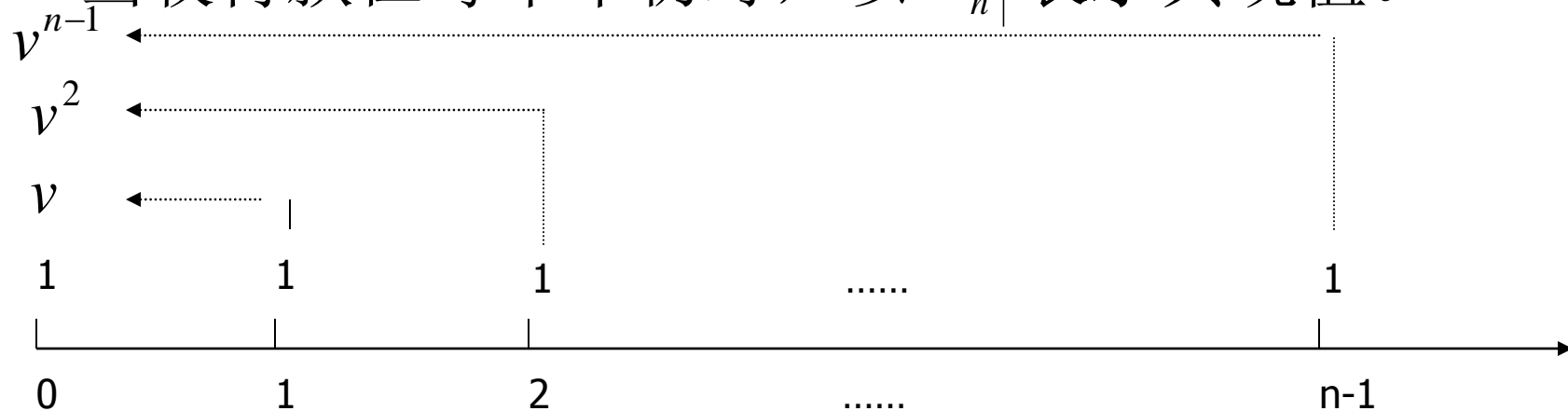
$$a_{\overline{n}|}(1-v) = v - v^{n+1}$$

所以

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$$

1元期末收付的年金现值：从1~n年，每年的1元年金折算到现在（第0年）的现值之和称为期末收付1元年金现值，记作 $a_{n|}$ 。在财务管理中常使用 $(P/A, i, n)$ 表示1元期末付年金现值。

当收付款在每年年初时，以 $\ddot{a}_{n|}$ 表示其现值。



期初收付

1元期初收付年的金现值：从0~ n-1 年，每年的1元年金折算到现在（第0年）的现值之和称为期初收付1元年金现值，记作 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^{n-1} \cdot v}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}$$

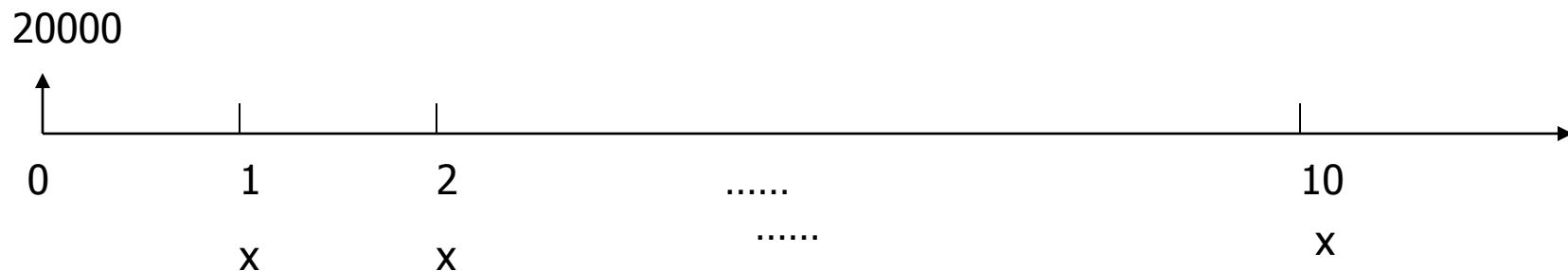
由于： $\ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot v = (1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}) \cdot v = v + v^2 + \cdots + v^n = a_{\overline{n}|}$

所以： $\ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot v = a_{\overline{n}|}$ $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot \frac{1}{v} = a_{\overline{n}|} \cdot (1 + i)$

例：王平从银行贷款**20000**元，他想在今后的十年内等额还清贷款，贷款年利率为**15%**，求每年还款额。

解：采取年金方式还款，其年金现值必然等于借款额。设每年还款额为**x**，则

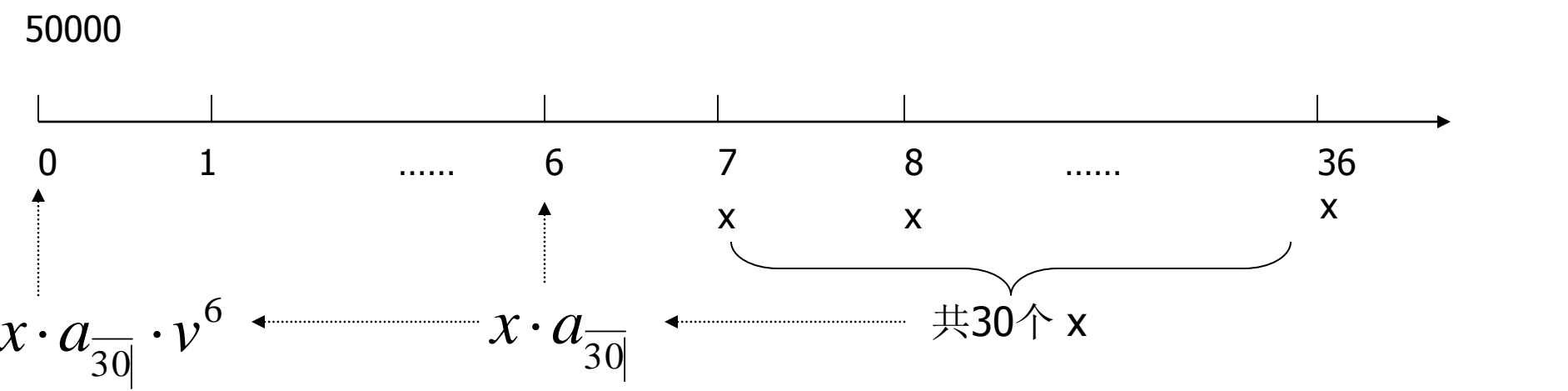
$$20000 = x \cdot a_{\overline{10}|} = x \cdot \frac{1 - (1 + 15\%)^{-10}}{15\%} = x \cdot 5.018769$$



每年的还款额为 **$20000/5.018769=3985.04$** 元

例：张三从银行贷款50000元，她计划从第七个月开始每月底等额还款，若银行规定在借款后三年内还清本息。设实际年利率为16%，求每月需还款额。

解：设按月结算时采用的月利率为j，每月还款x元，3年共36个月，有关的公式：
 $i = 16\%$ $j = \frac{i^{(12)}}{12}$ $\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} = 1 + 16\%$
 作图如下：



由以上图形分析可知： $x \cdot a_{\overline{30}|} \cdot v^6 = 50000$

在公式中采用的利率为j

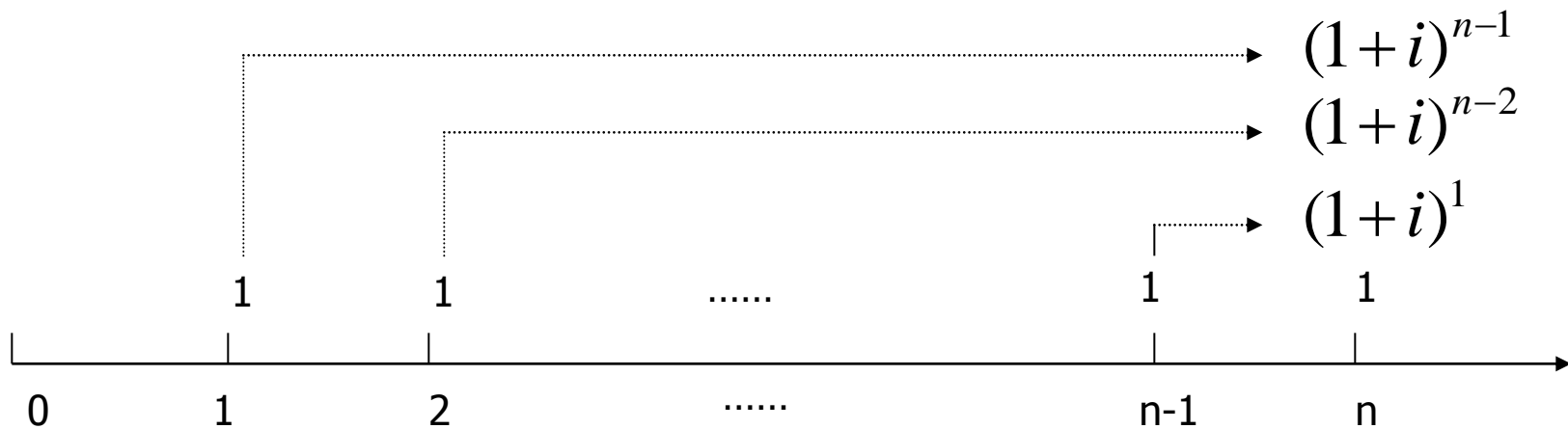
按月计复利，则j与实际年利率16%的关系为：

$$(1+j)^{12} = (1+16\%) \quad j = \sqrt[12]{1.16} - 1 = 0.012445$$

所以： $x = 50000 / (a_{\overline{30}|} \cdot v^6) = 50000 / 23.12703 = 2161.972$ 元

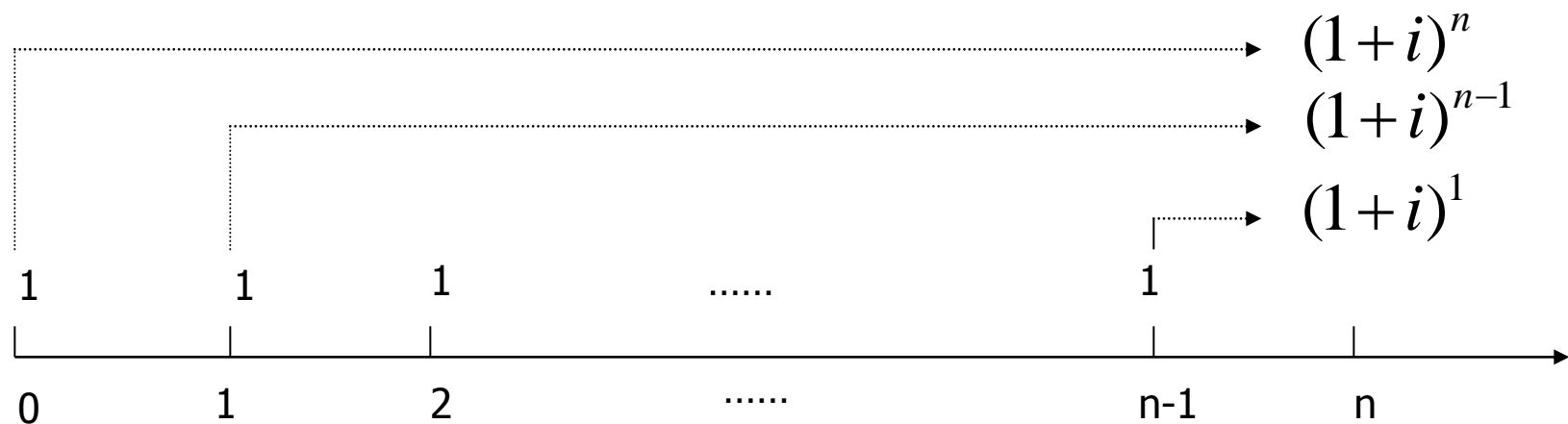
2、年金终值

终值是经过一定时期生息后的本金与利息之和。年金终值是一系列等额收付款在收付期末的终值之和。每年一单位元，每年末收付的年金终值以 $s_{\overline{n}|}$ 表示，它是从1 ~ n年每年1元年金在第n年的终值之和。



如图所示，可知： $s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
 显然：

$$a_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n = s_{\overline{n}|} \quad \text{或} \quad a_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \cdot v^n$$

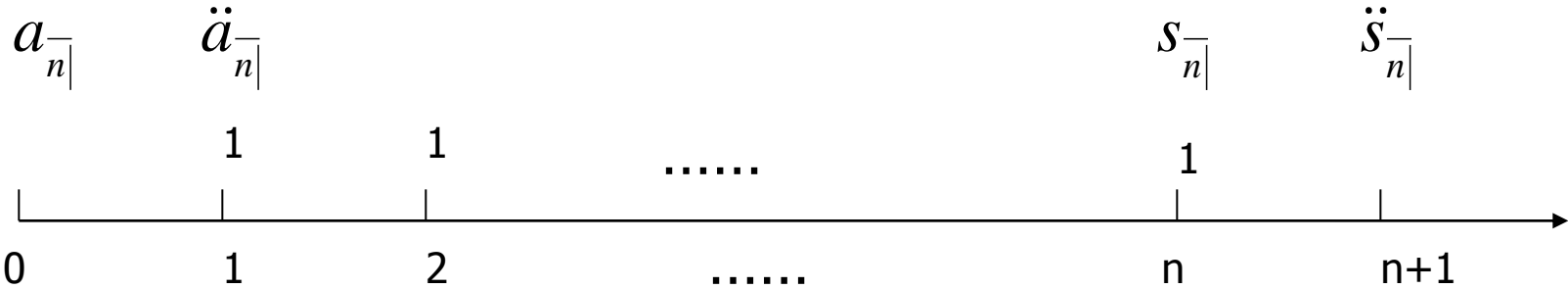


每年一单位元，每年初收付的年金终值以 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 表示。

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = \frac{(1+i) - (1+i)^{n+1}}{1 - (1+i)} \\ &= \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{i}{(1+i)}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}\end{aligned}$$

显然： $s_{n|} \cdot (1+i) = \ddot{s}_{n|}$ $\ddot{a}_{n|} \cdot (1+i)^n = \ddot{s}_{n|}$

它们的位置关系可用以下图形表示：



例：张燕每月初存款50元，共存了10年，该年实际利率为9%，求10年后她一共能得到多少元？

解：设每月结算时所采用的月利率为 j ，即 $j = \frac{i^{(12)}}{12}$

由 $(1+j)^{12} = 1+9\%$ ，得 $j=0.0072$

10年共120个月，10年后的终值为：

$$50 \cdot \ddot{s}_{\overline{120}|} = 50 \times \frac{(1+0.0072)^{121} - (1+0.0072)}{0.0072} = 9554.300857 \text{元}$$

即10年后共可得到9554.30元。